



TITLE:

# CPMを用いた不確実・不確定状況下におけるクリティカルパスの求解 (最適化手法の理論と応用の繋がり)

AUTHOR(S):

蓮池, 隆

---

CITATION:

蓮池, 隆. CPMを用いた不確実・不確定状況下におけるクリティカルパスの求解 (最適化手法の理論と応用の繋がり). 数理解析研究所講究録 2013, 1829: 72-79

ISSUE DATE:

2013-03

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/194808>

RIGHT:

## CPM を用いた不確実・不確定状況下におけるクリティカルパスの求解

大阪大学大学院・情報科学研究科 蓮池隆

Takashi Hasuike

Graduate School of Information Science and Technology,  
Osaka University

### 1. はじめに

実社会の様々な活動の中でも、特に完了期限が設定されたプロジェクトは、期限遵守とともに目的を達成することの重要性が高い活動である。その規模も多種多様であり、都市の再開発や町おこし、震災復興といった非常に大規模なものや、新商品開発といった企業に特化したもの、また生産物流におけるサプライチェーンも原料の仕入れから消費者へ商品をお届けるまでの一連の流れもプロジェクトと見なすことができ、プロジェクトという用語が包括する範囲は多岐にわたる。このようなプロジェクトにおいて、プロジェクト内の個々の作業の遅延や中間生成物の品質の低下は、プロジェクト全体の崩壊を引き起こす可能性があり、特にボトルネックとなる一連の過程は、危険な要因として最も注視する必要がある。よって、プロジェクト内のボトルネック過程を発見することは、プロジェクト遂行において最重要課題となる。

本論文ではプロジェクト完了時間に至るまでの時間・日程管理に関するボトルネックを発見する手法に着目し、CPM(Critical Path Method)を導入する。CPM は PERT(Program Evaluation and Review Technique)とともに、プロジェクト内のボトルネック工程を発見する代表的な手法の1つであり、様々な生産システムや経営システムの中に組み込まれている[7, 8, 12]。また CPM は PERT とは異なり、資源投入による所要日程の改善が行われることも考慮しており、実際の様々な制約条件を導入できることが特徴である。CPM において、ボトルネックとなる工程はクリティカルパスと呼ばれ、クリティカルパスを発見・管理することで、プロジェクト全体の管理・遂行を行うことが可能である。また一連のプロジェクトの流れは、各作業の先行関係を考慮したネットワークとして表現され、作業工程・作業時間をノードもしくはアークに対応させることで、AoN(Activity on Node)型もしくは AoA(Activity on Arc)型に分類できるが、本論文では AoA 型に焦点を絞り、以下の議論を進めていく。一般的に知られているように、CPM を用いたクリティカルパスを求めるための数理モデリングはネットワーク計画問題の枠組みで行われ、最長路問題(最短路問題の逆)として定式化することができる[12]。また資源投入による作業時間の短縮を表現する時間費用関数が線形であると仮定した場合に、線形計画問題としても定式化が可能である。

このように通常は全てのパラメータが固定値でかつ所与であることを前提としているが、実社会では政治・経済情勢、気候変動、データ誤差などの外的要因等により、作業時間に

ぶれが生じ、またこれらのデータを統計解析しパラメータ値を推定したとしても、確率分布として得られるため、数理計画法を利用して解くためには、何らかの最適性基準を設定する必要性が生じる。このような不確実性を導入した既存研究においては最頻値、最良値、最悪値からなる 3 点見積もりがとられることがしばしばであるが、プロジェクト管理を厳密に行うためには、より精度の高い確率分布を設定することが重要となる。さらに投入資源により作業時間がどのくらい改善されるかは、特にその作業が新規事業であればあるほど、関係者の経験と直感により見積もられることが多く、そこには曖昧さが生じることになる。以上のことから、不確実性はもちろんのこと、曖昧さを導入した CPM の必要性が認められるため、曖昧さの数理的表現としてファジィ理論を用いた CPM が多くの研究者により構築されている[1-4, 9-11, 13]。最近では、不確実性と曖昧さを同時に扱うような CPM も開発されている[5]。

一方で、たとえ不確実性や曖昧さが導入されたとしても、最終作業が目標完了時間内に、できるだけ確実に終了するように、意思決定者はリスク管理をする必要があり、この観点から CPM を利用した数理モデルを構築しなければならない。確率計画法の枠組みにおいて、最終完了時間以下を達成する確率が一定レベル以上となる状況を想定した機会制約条件がリスク管理手法として主に適用されている。また、Huang and Ding[6]は確率変数と同時に、作業時間の時刻依存性を導入したモデルを提案し、機会制約条件および GA を用いた解法アルゴリズムを構築している。しかしこれらの既存研究では作業時間短縮のための費用投入による影響とその曖昧性、ならびに導入コスト上限を考慮していない。よって本論文では、資源導入により作業時間が短縮される確率が増加するものと仮定した状況下において、状況を満たす確率最大化をリスク管理の観点から導入した CPM を提案する。また提案 CPM を用いた数理モデルに対し、主問題の最適性を失うことなく等価確定変換を行うとともに、ネットワーク計画法を用いた解法アルゴリズムを開発する。

## 2. 基本的な CPM によるクリティカルパス求解のための定式化

まず初めに基本的な CPM によるクリティカルパスを求めるための数理計画問題を定式化する。本論文では 1 章でも示したように、AoA(Activity on Arc)型をベースとしたプロジェクトネットワークを構築する。ノード集合としてアクティビティの開始可能時刻を表現する事象集合を  $V$ 、有向枝の集合として作業内容集合を  $E$  とする。つまり、プロジェクト内の各作業は有向枝に割り当てられているものとする。またプロジェクト開始ノードを  $s$ 、プロジェクト終了ノード  $t$  とする。つまり、ノード  $t$  へ到着した時点での時刻がプロジェクト完了時刻となり、 $s$  から  $t$  への最長路を求めることでクリティカルパスを求めることができる。

クリティカルパスに含まれる・含まれないかを決定する 0-1 決定変数  $x_{ij}$  を設定した場合、資源導入を考慮しない場合のクリティカルパスは、次の最長路問題の最適解となる。

$$\begin{aligned}
& \text{Maximize } \sum_{(i,j) \in E} t_{ij} x_{ij} \\
& \text{subject to } \mathbf{x} \in X, \\
& X \triangleq \left\{ \mathbf{x} \left| \begin{array}{l} \sum_{(i,j) \in E} x_{ij} - \sum_{(j,i') \in E} x_{ji'} = \begin{cases} 1 & j=t \\ 0 & j \in V \setminus \{s,t\} \\ -1 & j=s \end{cases} \\ x_{ij} \in \{0,1\}, (i,j) \in E \end{array} \right. \right\}
\end{aligned} \tag{1}$$

この問題はプロジェクトネットワークの特徴から無閉路有向グラフ(DAG: Directed Acyclic Graph)における最長路問題であるため、既存手法から効率的にクリティカルパスを求めることができる。しかし、1章でも述べたように、プロジェクトを取り巻く実社会の様々な不確実性・曖昧さを考慮した場合、(1)で定式化された CPM の数理モデルも拡張する必要がある。

### 3. 不確実性・不確定性を考慮した CPM によるクリティカルパス求解の数理モデル提案

本論文では、各有向枝を以下のように最短作業時間となる場合から最悪作業時間となる場合までに分割を行い、それぞれに作業時間が  $t_{ij}^{(k_{ij})}$  以下となる累積確率  $\beta_{ij}^{(k_{ij})}$  を付与する。

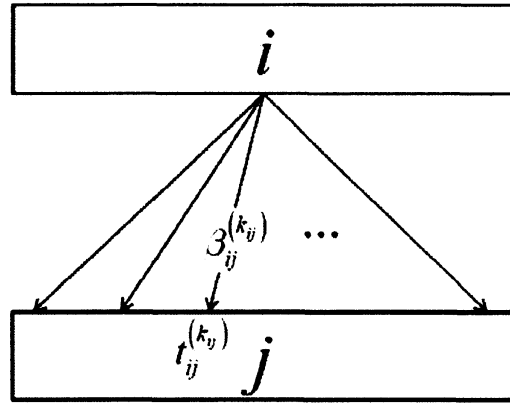


図1 起こりうる作業時間(有向枝)  $t_{ij}^{(k_{ij})}$  とその累積確率分布  $\beta_{ij}^{(k_{ij})}$

さらに  $\tilde{c}_{ij}$  として、作業時間が少なくなるような有向枝の累積確率を上昇させるための資源導入量を設定する。このパラメータは1章でも述べたように、1単位確率を上昇させるのに必要な資源量が曖昧な状況であるとして、ファジィ数として設定されるが、本論文ではフ

ファジィ数の最も基本的かつ特殊な場合として、以下のような区間値として設定する.

$$\tilde{c}_{ij} = [c_{ij}^L, c_{ij}^U] = [\bar{c}_{ij} - \varepsilon_{ij}, \bar{c}_{ij} + \varepsilon_{ij}] \quad (2)$$

以上の設定から、 $x_{ij}^{(k_{ij})}$  を有向枝の中からどの枝を選択するか の 0-1 変数、また  $y_j$  を作業  $j$  の開始可能時刻、プロジェクト完了時刻を  $T$  とし、作業時間の不確実性を有しながら、できるかぎり最終作業  $t$  が完了時刻  $T$  以下となるように、つまり、完了時刻  $T$  以下となる累積確率をできるだけ大きくするような CPM を以下のように定式化する.

$$\begin{aligned} & \text{Maximize} \quad \prod_{(i,j) \in E_R, k_{ij} \in A_{ij}} \beta_{ij}^{(k_{ij})} x_{ij}^{(k_{ij})} \\ & \text{subject to} \quad y_i + t_{ij}^{(k_{ij})} x_{ij}^{(k_{ij})} - y_j \leq 0, \quad ((i,j) \in E) \\ & \quad y_s = 0, \quad y_t \leq T, \\ & \quad y_j \geq 0, \quad j \in V \\ & \quad \sum_{k_{ij} \in A_{ij}} x_{ij}^{(k_{ij})} = 1, \quad x_{ij}^{(k_{ij})} \in \{0,1\}, \quad \left( \begin{array}{l} (i,j) \in E, \\ k_{ij} \in A_{ij} = \{1, \dots, \alpha_{ij}\} \end{array} \right) \\ & \quad \sum_{(i,j) \in E} \tilde{c}_{ij} \leq \tilde{C} \end{aligned} \quad (3)$$

ここで、 $E_R$  は開始ノード  $s$  から終了ノード  $t$  まで到達可能なルートの集合である. また  $\tilde{C}$  は最大投入可能コストであり、左辺の  $\tilde{c}_{ij}$  がファジィ数(区間値)を考慮して、本論文では  $\tilde{C}$  を区間値として設定する、つまり、 $\tilde{C} = [C^L, C^U]$  と設定する.

### 3.1. 投入資源により累積確率が変化する場合

本節の提案モデルでは資源投入  $\tilde{c}_{ij}$  により累積確率が変化することを考慮する、つまり累積確率  $\beta_{ij}^{(k_{ij})}$  は次のような  $\tilde{c}_{ij}$  に依存した形

$$\beta_{ij}^{(k_{ij})} \leftarrow \bar{\beta}_{ij}^{(k_{ij})} \triangleq \min \left\{ \bar{\beta}_{ij}^{(k_{ij})} (\bar{c}_{ij}), 1 \right\} \quad (4)$$

で再設定される. またファジィ数(区間値)による制約条件  $\sum_{(i,j) \in E} \tilde{c}_{ij} \leq \tilde{C}$  は、区間値の下限值、上限値の不等式関係を次のように表現することで、確定変換を行う.

$$\sum_{(i,j) \in E} \tilde{c}_{ij} \preceq \tilde{C} \Leftrightarrow \begin{cases} \sum_{(i,j) \in E} c_{ij}^L \leq C^L \\ \sum_{(i,j) \in E} c_{ij}^U \leq C^U \end{cases} \quad (5)$$

以上の変換を基に, 決定変数  $x_{ij}$  に関しても図 1 に示したように有向枝の数に合わせて,  $x_{ij}^{(k_{ij})}$  と再設定し, 主問題(3)は次の問題に変換される.

$$\begin{aligned} & \text{Maximize} \quad \prod_{(i,j) \in E_R, k_{ij} \in A_{ij}} \bar{\beta}_{ij}^{(k_{ij})} x_{ij}^{(k_{ij})} \\ & \text{subject to} \quad y_i + t_{ij}^{(k_{ij})} x_{ij}^{(k_{ij})} - y_j \leq 0, \quad ((i,j) \in E) \\ & \quad y_s = 0, \quad y_t \leq T, \quad y_j \geq 0, \quad j \in V \\ & \quad \sum_{k_{ij} \in A_{ij}} x_{ij}^{(k_{ij})} = 1, \quad x_{ij}^{(k_{ij})} \in \{0,1\}, \quad ((i,j) \in E, k_{ij} \in A_{ij}) \\ & \quad \sum_{(i,j) \in E} (\bar{c}_{ij} - \varepsilon_{ij}) \leq C^L, \quad \sum_{(i,j) \in E} (\bar{c}_{ij} + \varepsilon_{ij}) \leq C^U, \\ & \quad \bar{\beta}_{ij}^{(k_{ij})} = \min \left[ \beta_{ij}^{(k_{ij})} (\bar{c}_{ij}), 1 \right] = \left[ \beta_{ij}^{(k_{ij})} (\bar{c}_{ij}), 1 \right]^- \end{aligned} \quad (6)$$

この問題の目的関数  $\prod_{(i,j) \in E_R, k_{ij} \in A_{ij}} \bar{\beta}_{ij}^{(k_{ij})} x_{ij}^{(k_{ij})}$  において, 離散的な累積確率および  $x_{ij}^{(k_{ij})}$  が 0-1 変数

であることを利用することで, 次のように等価確定変換される.

$$\begin{aligned} & \text{Maximize} \quad \prod_{(i,j) \in E_R, k_{ij} \in A_{ij}} \bar{\beta}_{ij}^{(k_{ij})} x_{ij}^{(k_{ij})} \\ & \Leftrightarrow \text{Maximize} \quad \log \left( \prod_{(i,j) \in E_R, k_{ij} \in A_{ij}} \bar{\beta}_{ij}^{(k_{ij})} x_{ij}^{(k_{ij})} \right) \\ & \Leftrightarrow \text{Maximize} \quad \sum_{(i,j) \in E, k_{ij} \in A_{ij}} \left( \log \bar{\beta}_{ij}^{(k_{ij})} \right) x_{ij}^{(k_{ij})} \end{aligned} \quad (7)$$

以上の変換から, 最終的に次の問題を解くことで, 目的のクリティカルパスを求めることが可能となる.

$$\begin{aligned}
& \text{Maximize} && \sum_{(i,j) \in E, k_{ij} \in A_{ij}} \left( \log \bar{\beta}_{ij}^{(k_{ij})} \right) x_{ij}^{(k_{ij})} \\
& \text{subject to} && y_i + t_{ij}^{(k_{ij})} x_{ij}^{(k_{ij})} - y_j \leq 0, \quad ((i,j) \in E) \\
& && y_s = 0, y_t \leq T, y_j \geq 0, j \in V \\
& && \sum_{k_{ij} \in A_{ij}} x_{ij}^{(k_{ij})} = 1, x_{ij}^{(k_{ij})} \in \{0,1\}, ((i,j) \in E, k_{ij} \in A_{ij}) \\
& && \sum_{(i,j) \in E} (\bar{c}_{ij} - \varepsilon_{ij}) \leq C^L, \sum_{(i,j) \in E} (\bar{c}_{ij} + \varepsilon_{ij}) \leq C^U, \\
& && \bar{\beta}_{ij}^{(k_{ij})} = \left[ \beta_{ij}^{(k_{ij})} (\bar{c}_{ij}), 1 \right]^- \quad ((i,j) \in E)
\end{aligned} \tag{8}$$

この問題は連続決定変数の  $y_j$  および 0-1 決定変数  $x_{ij}^{(k_{ij})}$  の両方が含まれる 0-1 混合整数計画問題であり, さらに累積確率  $\bar{\beta}_{ij}^{(k_{ij})}$  に関して  $\min$  関数を用いられているため非線形性が強く, 規模の大小にかかわらず厳密解法を適用するには限界があり, 近似解法やタブサーチ, またはソフトコンピューティングなどの手法を利用する必要がある.

### 3.2. 投入資源により作業時間が変化する場合

本節の提案モデルでは資源投入  $\tilde{c}_{ij}$  が作業時間に直接的に作用する場合, つまり  $t_{ij}^{(k_{ij})}$  が  $\tilde{c}_{ij}$  に依存した  $t_{ij}^{(k_{ij})}(\bar{c}_{ij})$  で再設定される. 本論文では簡単のため,  $t_{ij}^{(k_{ij})}(\bar{c}_{ij}) = \bar{t}_{ij}^{(k_{ij})} - \lambda_{ij} \bar{c}_{ij}$  と固定値  $\lambda_{ij}$  を用いた線形関係である状況を想定する. 作業時間が資源投入に依存する以外の部分である, 目的関数やその他の制約条件に関しては, 3.1 節と同様の議論が成り立つため, 提案主問題(3)は次の問題に変換される.

$$\begin{aligned}
& \text{Maximize} && \sum_{(i,j) \in E, k_{ij} \in A_{ij}} \left( \log \beta_{ij}^{(k_{ij})} \right) x_{ij}^{(k_{ij})} \\
& \text{subject to} && y_i + \bar{t}_{ij}^{(k_{ij})} x_{ij}^{(k_{ij})} - \lambda_{ij} \bar{c}_{ij} x_{ij}^{(k_{ij})} - y_j \leq 0, \quad ((i,j) \in E) \\
& && y_s = 0, y_t \leq T, y_j \geq 0, j \in V \\
& && \sum_{k_{ij} \in A_{ij}} x_{ij}^{(k_{ij})} = 1, x_{ij}^{(k_{ij})} \in \{0,1\}, ((i,j) \in E, k_{ij} \in A_{ij}) \\
& && \sum_{(i,j) \in E} (\bar{c}_{ij} - \varepsilon_{ij}) \leq C^L, \sum_{(i,j) \in E} (\bar{c}_{ij} + \varepsilon_{ij}) \leq C^U,
\end{aligned} \tag{9}$$

問題(9)は 3.1 節の問題とは異なり,  $\min$  関数を含まない通常の 0-1 混合整数計画問題となっているため, 規模がそこまで大きくない問題であれば CPLEX などのソルバーを用いることで厳密に解くことは可能である. 中規模から大規模になると厳密解法を適用するには限界があるが, 3.1 節の問題よりは, ネットワーク計画法を近似解法やタブサーチ, またはソフトコンピューティングなどの手法にうまく組み込むことにより, 効率的にクリティカルパスを求めることが可能であると考えられる.

#### 4. まとめ

本論文では, 既存の CPM をより実社会のプロジェクト管理の状況へ拡張するために, 不確実性や曖昧さといった状況のみならず, 資源投入による状況改善も考慮した CPM の数理モデルを提案した. 資源投入による作業時間短縮方向への累積確率の向上, および直接的に作業時間短縮の改善を考慮したモデルにおいて, 等価確定変換を利用することで, 主問題を 0-1 混合整数計画問題へと帰着させ, その解法について考察を加えた.

今後は, 実際にネットワーク計画法とソフトコンピューティングやタブサーチといった手法との組合せによる効率的かつ汎用的な解法アルゴリズムの開発や, 実プロジェクトのデータを適用したモデルの検証, 評価を行うことで改良点の考察を行っていく.

#### 参考文献

- [1] S. Chanas, D. Dubois, and P. Zielinski, "On the sure criticality of tasks in activity networks with imprecise durations", *IEEE Transaction on Systems, Man, and Cybernetics - Part B: Cybernetics*, 32, pp. 393-407, 2002.
- [2] S. Chanas and P. Zielinski, "Critical path analysis in the network with fuzzy activity times", *Fuzzy Sets and Systems*, 122, pp. 195-204, 2001.
- [3] S. Chanas and P. Zielinski, "The computational complexity of the criticality problems in a network with interval activity times", *European Journal of Operational Research*, 136, pp. 541-550, 2002.
- [4] S.P. Chen and Y.J. Hsueh, "A simple approach to fuzzy critical path analysis in project networks", *Applied Mathematical Modelling*, 32, pp. 1289-1297, 2008.
- [5] S.P. Chen and M.J. Tsai, "Time-cost trade-off analysis of project networks in fuzzy environments", *European Journal of Operational Research*, 212(2), pp. 386-397, 2011.
- [6] W. Huang and L. Ding, "Project-scheduling problem with random time-dependent activity duration times", *IEEE Transactions on Engineering Management*, 58(2), pp. 377-387, 2011.



- [7] J.E. Kelley, "Critical path planning and scheduling-mathematical basis", *Operations Research*, 9, pp. 296-320, 1961.
- [8] L.J. Krajewski and L.P. Ritzman, *Operations Management: Process and Value Chains*, seventh ed., Prentice-Hall, New Jersey, 2005.
- [9] D. Kuchta, "Use of fuzzy numbers in project risk (criticality) assessment", *International Journal of Project Management*, 19, pp. 305-31, 2001.
- [10] A.I. Slyeptsov and T.A. Tyshchuk, "Fuzzy critical path method for project network planning and control", *Cybernetics and Systems Analysis*, 3, pp. 158-170, 1997.
- [11] A.I. Slyeptsov and T.A. Tyshchuk, "Fuzzy temporal characteristics of operations for project management on the network models basis", *European Journal of Operational Research*, 147, pp. 253-265, 2003.
- [12] H.A. Taha, *Operations Research: An Introduction*, seventh ed., Prentice Hall, New Jersey, 2003.
- [13] P. Zielinski, "On computing the latest starting times and floats of activities in a network with imprecise durations", *Fuzzy Sets and Systems*, 150, pp. 53-76, 2005.